

Rozwiązania analityczne i numeryczne wybranej klasy zadań topologicznej optymalizacji konstrukcji

Tomasz Lewiński, Sławomir Czarnecki
Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej

Cezary Graczykowski
Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, Zakład Technologii Inteligentnych

1. WSTĘP

Pod pojęciem optymalizacji topologicznej rozumiemy metodę poszukiwania postaci konstrukcji, łącznie z postacią warunków podparcia. W ramach tej teorii stawia się zadania w najtrudniejszym sformułowaniu, bez przyjmowania *a priori* postaci rozwiązania, które byłoby dalej poprawiane. Metody optymalizacji topologicznej bazują na osiągnięciach matematycznej teorii relaksacji zadań rachunku wariacyjnego (w zagadnieniach opisywanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi) oraz na pewnych nowych metodach numerycznych rozwiązywania zadań optymalizacji w ujęciu dyskretnym. Stan wiedzy tej dziedziny jest omówiony w monografiach Bendsøe [3], Bendsøe i Sigmund [4], Allaire[1], Cherkasov [9], Lewiński i Telega [31]. Wyjątkową rolę w tej teorii pełnią znane rozwiązania analityczne; być może one właśnie były inspiracją rozwoju tej dziedziny. W tej pracy pokrótce omawiamy ważniejsze znane rozwiązania analityczne, począwszy od tych najłatwiejszych. Praca obejmuje także zagadnienia optymalnego rozkładu materiałów w płytach, powłokach i ciałach trójwymiarowych.

2. WIELOBOKI SZNUROWE I ŁUKI NIE PODLEGAJĄCE ZGINANIU POD OBCIĄŻENIEM PIONOWYM

2.1. Racjonalne projektowanie dźwigarów jest eliminowaniem zginania

Metodom projektowania konstrukcji budowlanych omówionym w pięknej książce Wacława Zalewskiego i Edwarda Allena [41] przyświeca wspólna myśl; eliminowanie zginania i ścinania poprzecznego przekrojów konstrukcji, czyli dążenie do wyrównywania naprężeń w każdym przekroju każdego elementu konstrukcji. Duża część tej książki dotyczy więc dźwigarów kratowych. Proponuje się metody graficzne obliczania sił wewnętrznych po to, aby ujrzeć wpływ geometrii kratownicy na wartości tych sił, czyli aby móc racjonalnie projektować kształty kratownic. Jednym z kryteriów jest wyrównywanie sił w dolnym lub górnym pasie biegnącym po linii łukowej, por.str.384-388 [41]. Jednoczesne wyrównywanie sił w obu pasach daje kształt soczewkowy, popularny w konstrukcjach mostowych XIX wieku oraz w budynkach współczesnych o stropach podwieszonych.

2.2. Konstrukcja łukowa trójprzegubowa

Rozważmy konstrukcję łukową trójprzegubową, poddaną pionowemu obciążeniu q odniesionemu do rzutu poziomego. Rzędne łuku odmierzane od jego cięciwy AB są proporcjonalne do $M(x)$, wykresu momentów na belce swobodnie podpartej od tego samego obciążenia $q(x)$. Ta konstrukcja łukowa nie jest zginana ani ścinana. Siła podłużna wynosi $N(x) = -H / \cos(\varphi(x))$, gdzie φ jest kątem nachylenia stycznej do łuku, a H jest wartością poziomą rozporu. Ta konstrukcja może być tak zaprojektowana,

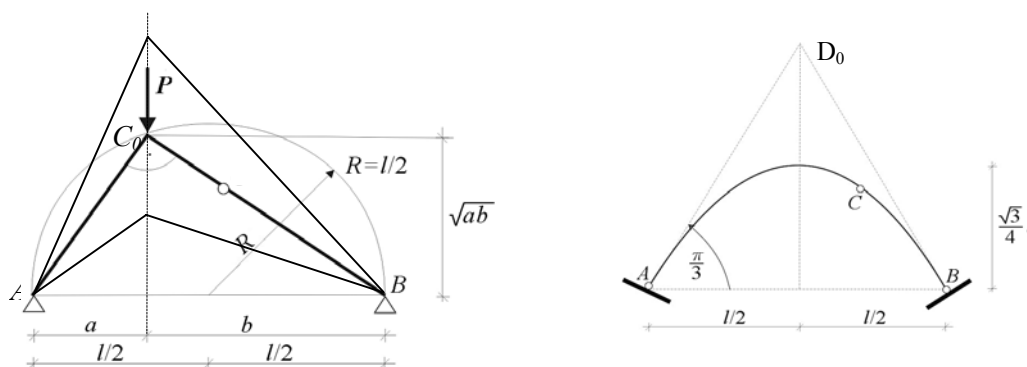
aby naprężenia były wyrównane i wynosiły σ . Wystarczy przyjąć przekrój $A(x) = H / (\sigma \cos(\varphi(x)))$. Spośród takich konstrukcji: łuków (kształt wynika z przyjętego obciążenia ciągłego q) lub ram (gdy obciążenie jest realizowane przez siły skupione) można wybrać jedną o najmniejszej objętości, czyli najłżejszą, jeśli gęstość masy jest stała. Ten najłżejszy łuk (lub rama), który nie może być zbyt wyniosły ani zbyt połogi, spełnia kryterium Williama Pragera, por. [36, Rys.8.10 str 339].

$$\frac{1}{l} \int_0^l (\operatorname{tg} \varphi)^2 dx = 1 + \zeta^2 \quad (1)$$

gdzie ζ jest tangensem nachylenia cięciwy AB. Wyprowadzenie tego kryterium podano w pracy [24], gdyż w książce [36] dowodu nie podano a pracy Pragera z oryginalnym dowodem nie udało się na razie odnaleźć. Kryterium (1) daje natychmiastową odpowiedź na dwa proste pytania:

a) jaki jest kształt najłżejszej równomiernie naprężonej trójprzegubowej ramy przenoszącej jedną siłę pionową? b) jaki jest kształt najłżejszego równomiernie naprężonego łuku pod obciążeniem $q = \text{const}$?

Rozwiązanie zadania (a) podano na Rys. 1. Najłżejsza rama tworzy trójkąt prostokątny; $\angle AC_0B = \pi/2$. Zatem C_0 leży na okręgu o średnicy AB. Wyższe i niższe rama pokazane na Rys. 1, także nie podlegające zginaniu, przenoszące tę samą siłę P o zmiennym położeniu na danej linii pionowej będą cięższe. Podkreślmy, że pręt AC_0 ma większy przekrój niż C_0B , bo jest bardziej nachylony. Rozwiązanie zadania (b) podano na Rys. 2: wśród łuków parabolicznych najłżejszy jest łuk wpisany w trójkąt równoboczny AD_0B . Wówczas wysokość tego łuku jest równa połowie wysokości tego trójkąta. Przekroje są największe tam, gdzie nachylenie łuku jest największe, czyli w podporach. Konstrukcje optymalne z Rys.1,2 spełniają warunek Pragera z prawą stroną równą 1.



Rys. 1 Najłżejsza rama obciążona jedną siłą skupioną Rys. 2 Najłżejszy łuk pod obciążeniem stałym

Proste i przekonujące rozwiązania z Rys.1,2 są trudne do odnalezienia w literaturze pomimo natłoku prac o projektowaniu optymalnym. Łuk z Rys.2 był przedmiotem głębokiego studium numerycznego w pracy Darwich i in.[15]. Teoria kształtu konstrukcji najłżejszych przenoszących obciążenie pionowe o niestalonym miejscu przyłożenia wzdłuż danych linii pola sił czeka na pogłębioną analizę.

3. NAJŁEJSZE RÓWNOMIERNIE WYŁĘŻONE KONSTRUKCJE PODDANE OBCIĄŻENIU O DANYM MIEJSCU PRZYŁOŻENIA

3.1 Konstrukcje Maxwella

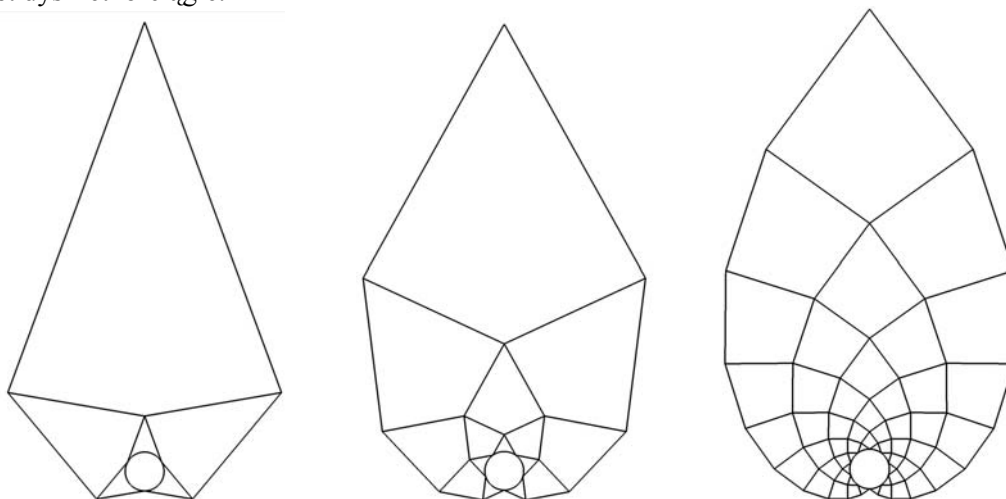
W poprzednim punkcie pracy przyjęto, że ustalona jest tylko intensywność obciążenia pionowego na jednostkę rzutu. Teraz przyjmujemy, że obciążenie ciągłe działa wzdłuż pewnej danej linii a siły skupione są przyłożone w konkretnych, ustalonych miejscach. Takie ustalenie obciążenia prowadzi do zupełnie innych rozwiązań optymalnych. Pierwsze rozwiązania dotyczące sił skupionych opracował J.C.Maxwell, choć w dostępnym autorom źródłach [34] trudno było te rozwiązania odnaleźć. Zgodnie z komentarzami w książkach Coxa [10] i Hempa [23] Maxwell postawił i rozwiązał problem znajdowania konstrukcji najłżejszej równomiernie naprężonej, przenoszącej trzy samozrównoważone siły skupione na płaszczyźnie. Zadanie to doczekało się niedawno ujęcia formalnego w pracach matematycznych Gangbo, Bouchitté, Buttazzo, Golay i Seppecher, por. [5,19,20].

3.2 Konstrukcje Michella

Inną ważną klasę zadań odkrył A.G.M. Michell [35], który rozpatrywał obciążenia działające ukośnie w stosunku do danej linii podporowej. Formalizacji rozważań Michella dokonali Prager i Rozvany, por.[36] i Hemp [23]. Pierwszą próbę matematycznego ujęcia tego zagadnienia podjęli Strang i Kohn [38]. Sformułowanie matematyczne można otrzymać z innego zadania: minimalizacji podatności tarcz, jak to pokazali Allaire i Kohn [2]. Nowe elementy teoretyczne można odnaleźć w pracach Graczykowskiego i Lewińskiego[21-22]. Ambitne ujęcie bazujące na teorii miary pojawiło się niedawno w pracy [5]. Pokrewne ujęcie podają Golay i Seppecher [20], prowadzące jednak do nieco innych sformułowań.

Nie jest łatwo tutaj pokrótce omówić formalne ujęcie zadań Michella. Najłatwiejszą drogą dojścia do zadania Michella jest ujęcie kratownicowe. Zadanie: znaleźć kratownicę równomiernie naprężoną i najlżejszą, przenoszącą dane obciążenie do danego obszaru projektowego. Przyjmuje się, że naprężenia dopuszczalne przy ściskaniu i rozciąganiu są jednakowe. Można zauważyć, że dodanie prętów i powtórne projektowanie przekrojów obniża wagę całej konstrukcji. Proces ten zazwyczaj nie ma końca- wyjątkiem jest najprostsze zadanie poszukiwania konstrukcji najlżejszej przenoszącej daną siłę poziomą (lub ukośnie działającą, pod kątem mniejszym niż 45 stopni) do poziomej linii podporowej. Rozwiązaniem jest kratownica dwuprętowa; pręty są nachylone pod kątem 45 stopni. Gdy siła działa pod większym kątem, rozwiązanie składa się z jednego pręta wzdłuż tej siły. To proste zadanie jest traktowane jako tzw. benchmark programów optymalizacji topologicznej dotyczących projektowania tarcz sprężystych.

Najciekawsze zadanie rozwiązane przez Michella dotyczy zewnątrz koła i warunku $|\sigma| < |\sigma_0|$. Można wykazać, że ciąg kratownic, trzy z nich pokazano na Rys.3, dąży do rozwiązania ścisłego, które jest dyskretno-ciągłe.

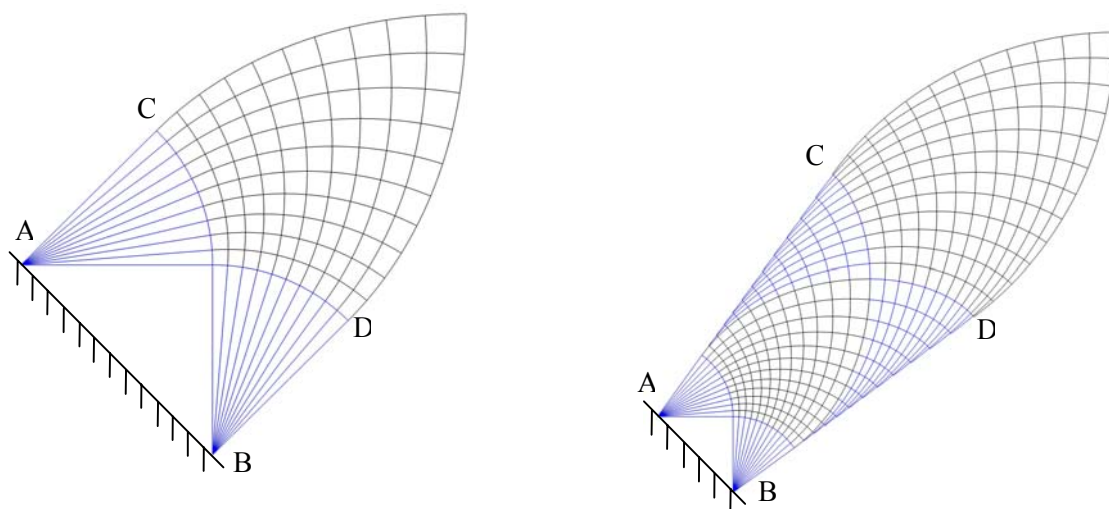


Rys.3 Kratownice optymalne oparte na kole, złożone z 12, 30, 110 prętów. Ich ciężary (wartości bezwymiarowe) wynoszą kolejno 176,40; 155,49; 147,82. Ścisła konstrukcja Michella jest dyskretno-ciągła; jej ciężar wynosi 145,42118, por. [22]

Wnętrze jest utworzone z kompozytu włóknistego o ortogonalnej budowie złożonej z dwu rodzin włókien. Włókna te dochodzą do brzegu pod kątem prostym. Konstrukcję okalają dwa pręty zakrzywione: jeden jest rozciągany i może być interpretowany jako kabel wzmacniający a drugi jest ściskany; jego wyboczenie nie jest brane pod uwagę. Pręty te przenoszą siłę podłużną. Węzeł, gdzie jest przyłożona siła skupiona jest zrównoważony. Ta konstrukcja jest statycznie wyznaczalna. Kolejno da się rozwiązać: algebraiczne zadanie równowagi węzła, zadanie równowagi prętów zakrzywionych, wyrażone równaniami różniczkowymi zwyczajnymi oraz zadanie równowagi wnętrza, wyrażone równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Zadanie Michella ma dwa sformułowania: prymalne (w terminach sił i naprężeń zastępczych lub raczej ich przyrostów, por.[32]) oraz dualne (w terminach przemieszczeń próbnych). Tą drugą metodą Michell znalazł jawną formułę na ciężar najlżejszej konstrukcji opartej na kole, por. Rys. 3. Jej zgodność z metodą prymalną wykazano w pracy Stranga i Kohna[38] oraz potwierdzono jawnie w pracy Graczykowskiego i Lewińskiego[21]. O zgodności tej

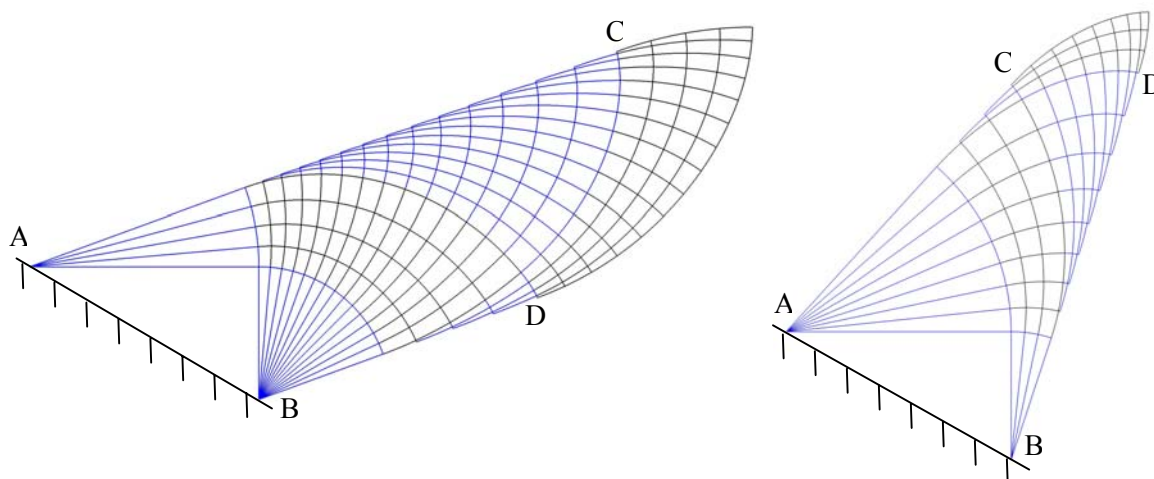
formuły z wynikami numerycznymi dotyczącymi kratownic z Rys.3 świadczy mały błąd szacowania ciężaru.

Ważną klasę konstrukcji Michella tworzą konstrukcje projektowane wewnątrz obszarów ograniczonych trzema liniami prostymi, gdzie krótszy bok jest linią podpory. Przykładowe rozwiązania pokazano na Rys. 4, dotyczące przypadku $|\sigma| < |\sigma_0|$.



Rys.4 Przykładowe rozwiązania Michella. Konstrukcje przenoszą siłę w wierzchołku do podpory AB . Obszar projektowy jest ograniczony liniami AB, AC, BD.

Linie ograniczające obszar projektowy stają się liniami z których styczne tworzą się rodziny włókien przenoszących siły wewnętrzne. Te linie graniczne są więc wzmocnione prętami o zmiennym przekroju. W pracach [21] podjęto zagadnienie konstrukcji siatek Michella w obszarach ograniczonych trzema liniami przy założeniu, że wartości naprężeń granicznych przy ściskaniu i rozciąganiu są różne: $-\sigma_d < \sigma_g$. Prace te obejmują analizę statyczną zadania prymalnego oraz kinematyczną zadania dualnego. Analitycznie – w prostszych przypadkach- lub numerycznie wykazano równoważność obu sformułowań.



Rys. 5 Przykładowe rozwiązania dotyczące różnych wartości naprężeń granicznych przy ściskaniu i rozciąganiu

Analityczny opis geometrii, kinematyki i statyki siatek z Rys. 4,5 opiera się na sekwencyjnym tworzeniu i łączeniu rozwiązań równania hiperbolicznego postaci

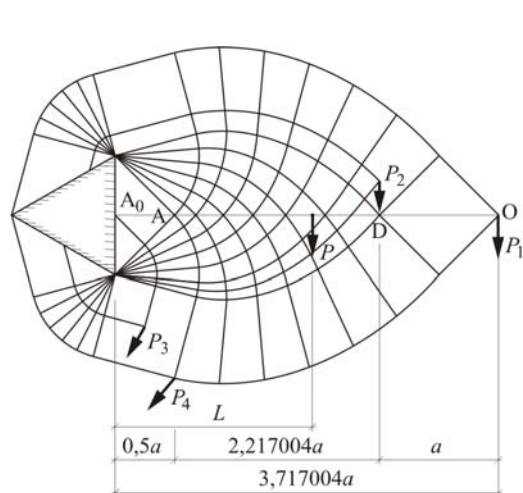
$$\partial^2 f / \partial \alpha \partial \beta - f = 0$$

względem układu krzywoliniowego ortogonalnego (α, β) . Stosuje się metodę funkcji Greena; funkcja ta jest określona z pomocą funkcję Bessela I_0). Metodę tę opracowali Caratheodory i Schmidt [6] w celu konstrukcji siatek Hencky'ego teorii plastyczności, por. też Chakrabarty [7]. Jest zaskakujące, że tak trudne zadanie dało się opracować analitycznie w każdym szczególe, stosując metodę analityczną

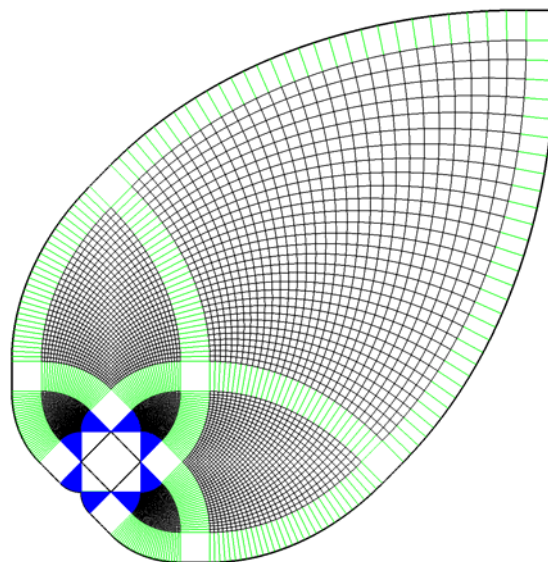
z pracy [8]. Autor tej pracy, H.S.Y.Chan, jest obecnie emerytowanym profesorem City University w Hong Kongu.

Fascynacja konstrukcjami Michella bierze się stąd, że nie są tu szukane ich cechy sprężysto-odpowiedź na dane obciążenie- lecz szukane są one same. Niewiadomą jest każda linia na Rys.4-5, łącznie ze sposobem podparcia.

Zadanie poszukiwania konstrukcji w pełni naprężonej ($|\sigma| < |\sigma_0|$) i najlżejszej przenoszącej jedną siłę skupioną do brzegu trójkąta równobocznego rozwiązano w pracy Lewińskiego i Rozvany'ego [28]. W kolejnej pracy będzie podane uzasadnienie konstrukcji wspornika opartego na brzegu kwadratu, anonsowane już w [37], por. Rys.7.

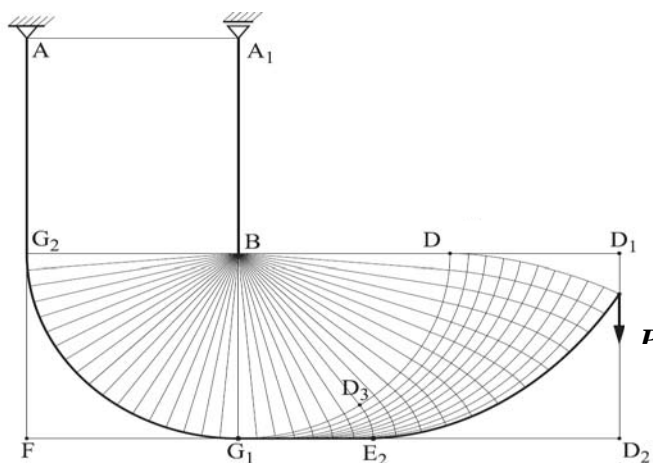


Rys.6 Najlżejszy wspornik oparty na brzegu trójkąta równobocznego



Rys.7 Najlżejszy wspornik oparty na brzegu kwadratu

Zagadnienie przeniesienia siły wewnątrz kolanka o kształcie litery L rozwiązano w pracy Lewińskiego i Rozvany'ego[29], por.Rys.8. Rozwiązanie to było wielokrotnie traktowane jako benchmark metod numerycznych, por. Kočvara i Stingl [25].

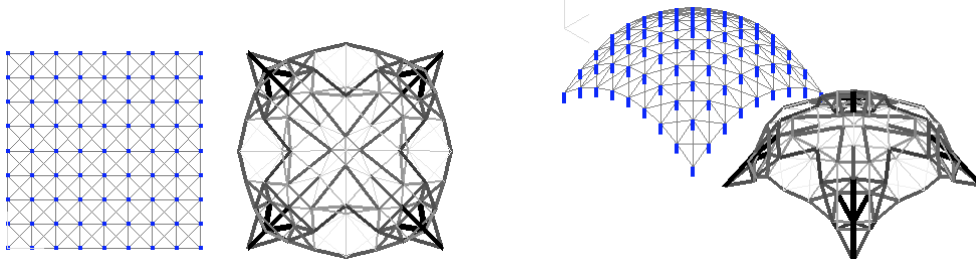


Rys. 8 Przykładowa konstrukcja Michella w obszarze projektowym w kształcie litery L

W zadaniach przestrzennych siatki Michella podlegają skręcaniu; są to prętowe powłoki obrotowosymetryczne. Można wykazać, że wśród powłok skręcanych obrotowosymetrycznych najlżejsza jest powłoka sferyczna, por. [27]. W szczególności- cięższa jest powłoka stożkowa zawarta wewnątrz optymalnej sfery.

2. OPTIMALIZACJA RAM PRZESTRZENNYCH

Ze względu na znaczenie i powszechność stosowania konstrukcji ramowych w budownictwie, problematyka optymalnego ich projektowania odgrywa coraz większą rolę. Należy jednak podkreślić, że o ile zagadnienia związane z optymalizacją kratownic były i są nadal przedmiotem bardzo wielu prac badawczych, to problematyka optymalizacji ram nie jest już tak powszechnie podejmowana, a jeśli pojawiają się prace na ten temat, to niemal wyłącznie dotyczą ram płaskich. W pracach Czarneckiego[11,12] przedstawiono wyniki numeryczne optymalizacji geometrii i topologii kilku ram przestrzennych otrzymane na podstawie metody Svanberga Ruchomych Asymptot. Funkcją celu jest podatność – poszukiwany jest kształt (położenia węzłów prostych prętów przestrzennych rami – ich współrzędne kartezjańskie) i/lub wartości promieni kołowych przekrojów poprzecznych prętów gwarantujących największą sztywność. Jedyłą funkcją ograniczeń jest ograniczenie na objętość wszystkich prętów rami. Bardzo skomplikowane wzory analizy czułości, w tym, szczególnie trudne do wyprowadzenia, analityczne wzory na pochodne cząstkowe macierzy sztywności względem parametrów definiujących współrzędne kartezjańskie położenia węzłów rami, uzyskano w programie obliczeń symbolicznych Maple, w którym po zdefiniowaniu wszystkich składowych macierzy sztywności przestrzennego pręta ramowego w globalnym układzie współrzędnych otrzymano gotowe formuły analityczne przekształcone do języka C za pomocą polecenia `codegen[C](...)`. Agregacja pochodnych cząstkowych macierzy sztywności pręta do pochodnej cząstkowej globalnej macierzy sztywności struktury ramowej została przeprowadzona zgodnie z klasycznym schematem MES.

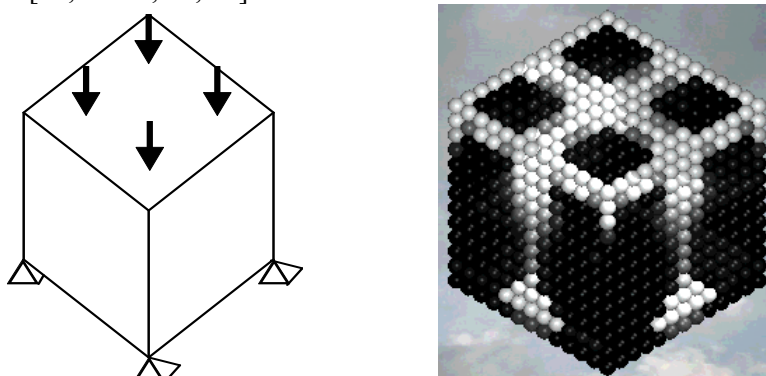


Rys. 9. Wizualizacja przestrzennej powłoki ramowej podpartej przegubowo nieprzesuwnie w czterech punktach narożnych. Obciążenie w postaci jednakowych sił pionowych przyłożonych do wszystkich węzłów. Widok struktury z góry i w rzucie izometrycznym przed (kolor niebieski) i po (kolory w odcieniach szarości od białego do czarnego) optymalizacji geometrii i topologii, por.[12]

3. OPTIMALIZACJA ROZKŁADU DWU MATERIAŁÓW W TARCZACH, PŁYTACH POWŁOKACH I BRYŁACH SPRĘŻYSTYCH

Podstawowe zadanie optymalizacji topologicznej podejmowane w książkach [2,3,4,9,32] polega na poszukiwaniu optymalnego rozmieszczenia dwu materiałów izotropowych pod warunkiem, że jeden z tych materiałów ma daną objętość. Rozkład optymalny minimalizuje podatność bryły, rozumianej jako praca obciążenia zewnętrznego. W uogólnionym zadaniu optymalizacji kształtu słabszy materiał jest pustką. Powyższe zadania są jednak źle sformułowane; wymagają tzw. relaksacji. Relaksacja polega na dopuszczeniu obszarów kompozytowych, zbudowanych z tych samych danych materiałów. W pracy [13] przedstawiono wyniki numeryczne optymalnych rozkładów materiału mocniejszego w bryłach sprężystych otrzymane na podstawie algorytmu COC czyli tzw. metody kryterium optymalnego wykorzystującej, wynikające z warunków koniecznych stacjonarności funkcjonału Lagrange'a, relacje wiążące mnożniki Lagrange'a. Uogólniony z przypadku 2D na przypadek ciał trójwymiarowych algorytm COC zaimplementowany został w oparciu własny program optymalizacyjny uruchamiany na przemian z systemem ABAQUS użytym jako „solver” do przeprowadzenia obliczeń statycznych ortotropowych, niejednorodnych ciał sprężystych [3,4]. Przyjęto stały rozkład naprężeń w elemencie skończonym w algorytmie COC co zdeterminowało stałe wartości udziałów objętościowych w poszczególnych elementach skończonych dwóch materiałów izotropowych tworzących kompozyt. Wczytywanie danych wejściowych dla systemu ABAQUS i odczytywanie wyników z ABAQUSA potrzebnych w programie optymalizacyjnym jak i uruchamianie obydwu tych programów jest w pełni automatyczne. Przykładowy rozkład materiału mocniejszego w

przypadku przestrzennym pokazano na Rys. 10. Zagadnienie optymalizacji topologicznej płyt i powłok jest przedmiotem intensywnych badań Czarneckiego, Dzierżanowskiego, Kolanka, Sokolowskiego i in. [14, 16-18, 26, 30].



Rys. 10. Rozkład materiału mocniejszego w trójwymiarowym ciele sprężystym w kształcie prostopadłościanu podpartego w czterech dolnych rogach i obciążonego czterema siłami pionowymi przyłożonymi w czterech punktach górnej powierzchni. Algorytm: COC + ABAQUS, por. [13]

4. UWAGI KOŃCOWE

Rozwiązania analityczne i numeryczne optymalizacji topologicznej wychodzą naprzeciw oczekiwaniom inżynierów projektantów. To co w książce [41] jest określane w wielu miejscach mianem sztuki inżynierskiej, okazuje się nową dziedziną nauki, na pograniczu mechaniki, rachunku wariacyjnego i nieliniowego programowania. Rozwiązania globalne optymalizacji topologicznej zaczynają pojawiać się w książkach dla architektów jako inspiracje twórczego kształtowania obiektów budowlanych. W większym stopniu niż mechanika budowli, właśnie te metody łączą architektów i inżynierów konstruktorów, gdyż architekt oczekuje podpowiedzi dotyczącej formy idealnie dostosowanej do przewidywanych warunków eksploatacji, por. prace Zabłockiego i Zalewskiego[39,40].

Podziękowania

Niniejsza praca była częściowo finansowana w ramach grantu KBN No 4T07A 038 30 pt: Teoria i implementacja numeryczna zrelaksowanych sformułowań zadań optymalizacji w zagadnieniach z polami sprzężonymi. Projektowanie rozmieszczania materiałów w konstrukcjach kompozytowych.

Bibliografia

- [1] Allaire G.: Shape Optimization by the Homogenization Method. Springer, New York, 2002.
- [2] Allaire G. and Kohn R.V.: Optimal design for minimum weight and compliance in plane stress using extremal microstructures. *Eur.J.Mech.,A/Solids*, **12**: 839-878, 1993
- [3] Bendsøe M.P.: Optimization of Structural Topology, Shape and Material. Springer, 1995,
- [4] Bendsøe M.P., Sigmund O.: *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*. Springer, 2003
- [5] Bouchitté G., Buttazzo G.: Characterization of optimal shapes and masses through Monge-Kantorovich equation. *J.Eur.Math.Soc.*, **3**:139-168, 2001.
- [6] Carathéodory C., Schmidt E.: Über die Hencky-Prandtlschen Kurven. *ZAMM*, **3**:468-475, 1923.
- [7] Chakrabarty J.: *Theory of Plasticity*. Elsevier, Amsterdam, 2006
- [8] Chan H.S.Y.: Half-plane slip-line fields and Michell structures. *Q.J.Mech.Appl.Math.*, **20**:453-469, 1967
- [9] Cherkæev A.V.: Variational Methods for Structural Optimization. Springer, New York, 2000.
- [10] Cox H.L.: *The Design of Structures of Least Weight*. Pergamon, 1965
- [11] Czarnecki S.: Compliance optimization of the truss structures. *Comp.Ass.Mech.Eng.Sci.*, **10**: 117-137, 2002
- [12] Czarnecki S.: Zastosowanie metody ruchomych asymptot w optymalizacji topologii ram przestrzennych, *50. Konferencja Naukowa Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN iK.N. PZITB*, t. **II**, str.45-52, 2004.
- [13] Czarnecki S., Lewiński T.: Shaping the stiffest three-dimensional structures from two given isotropic materials. *Comp. Ass. Mech. Eng. Sci*, **13**: 53-83, 2006
- [14] Czarnecki S., Lewiński T.: Optimal layouts of a two-phase isotropic material in thin elastic plates. In:

Z. Waszczyszyn, J. Pamin, Eds. *Proc. 2nd European Conference on Computational Mechanics, ECCM-2001*, Kraków, 26-29 czerwca 2001. CD ROM

- [15] Darwich W., Gilbert M., Tyas A.: Optimum structure to carry a uniform load between two pinned supports. 7th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, COEX Seoul, 21-25 May 2007, Korea.
- [16] Dzierżanowski G.: *Optymalizacja rozmieszczenia materiałów w sprężystych dźwigarach powierzchniowych. Rozprawa Doktorska*. Politechnika Warszawska, Warszawa, 2004.
- [17] Dzierżanowski G.: Shape design of shallow shells made of isotropic incompressible materials. W: *Shell Structures. Theory and Applications.*, W. Pietraszkiewicz, C. Szymczak, Red., Taylor and Francis/Balkema, London str. 101-104, 2005.
- [18] Dzierżanowski G., Lewiński T.: Layout optimization of two isotropic materials in elastic shells. *J. Theor. Appl. Mech.*, **41**:459-472, 2003
- [19] Bouchitté G., Seppecher P., Gangbo W.: Michell trusses and existence of lines of principal action, preprint
- [20] Golay F., Seppecher P.: Locking materials and the topology of optimal shapes. *Eur. J. Mech. A/Solids*, **20**: 631-644, 2001.
- [21] Graczykowski C., Lewiński T.: Michell cantilevers constructed within trapezoidal domains -Part I: Geometry of Hencky nets. *Struct. Multidisc. Optimiz.*, **32**, No 5: 347-368, 2006. Part II: Virtual displacement fields, *ibidem* **32**, No 6: 463-471, 2006; Part III: Force fields, *ibidem*, **33**, No 1: 27-46, 2007; Part IV: Complete exact solutions of selected optimal designs and their approximations by trusses of finite number of joints, *ibidem* **33**, No 2: 113-129, 2007
- [22] Graczykowski C., Lewiński T.: The lightest plane structures of a bounded stress level transmitting a point load to a circular support. *Control and Cybernetics*, **34**, No 1: 227-253, 2005
- [23] Hemp W.S.: *Optimum Structures*. Clarendon Press, Oxford, 1973
- [24] Hetmański K., Lewiński T.: Kształtowanie ram i łuków płaskich nie podlegających zginaniu, In: *Theoretical Foundations of Civil Engineering-XV*. W. Szcześniak, Red. str 231-246, Polish-Ukrainian-Lithuanian Transactions. Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa, 2007.
- [25] Kočvara M. Stingl M.: Free material optimisation for stress constraints. *Struct. Multidisc. Optimiz.* **33**: 323-335, 2007.
- [26] Kolanek K., Lewiński T.: Circular and annular two-phase plates of minimal compliance, *Comp. Ass. Mech. Eng. Sci.*, **10**, No 2:177-199, 2003
- [27] Lewiński T.: Michell structures formed on surfaces of revolution. *Struct. Multidisc. Optimiz.*, **28**: 20-30, 2004
- [28] Lewiński T., Rozvany G.I.N.: Exact analytical solutions for some popular benchmark problems in topology optimization II: three-sided polygonal supports. *Struct. Multidisc. Optimiz.*, **33**, No 4-5: 337-349, 2007
- [29] Lewiński T., Rozvany G.I.N.: Exact analytical solutions for some popular benchmark problems in topology optimization III. Case of the L-shaped feasible domain. (w opracowaniu)
- [30] Lewiński T., Sokołowski J.: Energy change due to the appearance of cavities in elastic solids, *Int. J. Solids. Structures*, **40**, No 7: 1765-1803, 2003
- [31] Lewiński T., Telega J.J.: *Plates, laminates and shells. Asymptotic analysis and homogenization*. World Scientific Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 2000
- [32] Lewiński T., Telega J.J.: Michell-like grillages and structures with locking. *Arch. Mech.* **53**: 303-331, 2001
- [33] Lewiński T.; Zhou M.; Rozvany G.I.N.: Extended exact solutions for least-weight truss layouts-Part I: Cantilever with a horizontal axis of symmetry. *Int. J. Mech. Sci.* **36**: 375-398, 1994; Part II: Unsymmetric cantilevers *ibidem* 399-419
- [34] Maxwell J.C. *Scientific Papers Vol. 2*, 161-207. Cambridge Univ. Press, 1890
- [35] Michell A.G.M.: The limits of economy of material in frame structures. *Phil. Mag.* **8**:589-597, 1904.
- [36] Rozvany G.I.N.: *Structural design via optimality criteria. The Prager approach to structural optimization*. Kluwer, Dordrecht, 1989.
- [37] Rozvany G.I.N., Lewiński T., Lógó J. and Pomezanski V.: New exact analytical solutions as benchmarks for numerical topology optimization, *Proceedings of the Eighth International Conference on Computational Structures Technology*. Edited by: B.H.V. Topping, G. Montero and R. Montenegro. 2006. pp 1-7. paper 209.
- [38] Strang G., Kohn R.V.: Hencky-Prandtl nets and constrained Michell trusses. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* **36**: 207-222, 1983
- [39] Zabłocki W.: Optymalizacja konstrukcji, a nowe formy architektoniczne budynków wysokościowych. *Architektura* **11**: 96-98, 2000.
- [40] Zalewski W.: 2000 Moc i Lekkość – muzy projektanta konstrukcji. *Architektura* **11**: 94-95
- [41] Zalewski W., Allen, E.: *Shaping Structures. Statics*. Wiley 1998.

Summary in English The paper recalls available analytical solutions of the most frequently discussed topology optimization problems of structural mechanics. The solutions refer to the Prager, Maxwell and Michell structures, revisited recently. The open problems of the optimal layout theory are discussed on the basis of numerical methods programmed with using the Moving Asymptotes Method and the contemporary Global Search Algorithms.